数理解析研究所講究録
1046巻 1998年 60-64

サブシフトからできるC^*環の自己同型について

上越教育大　松本健吾 (Kengo Matsumoto)

1. はじめに

ここでは，片側サブシフトの上の自己同型の性質と，対応するC^*環の上の自己同型の性質について調べる。内容の一部は，Preprint

「Y. Katayama - H. Takehana : On automorphisms of generalized Cuntz algebras」

と重複がある可能性がある。

2. 準備

$2 \leq n \in \mathbb{N}$ を固定する。$\Sigma = \{1, 2, \ldots, n\}$ とおき $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ 上のシフト σ を $\sigma(x_i) = (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ で定義する。$\Sigma^{\mathbb{Z}}$ の σ-不変閉部分集合 Λ に対して，位相力学系 (Λ, σ) を(両側)サブシフトと呼ぶ。サブシフト (Λ, σ) に対して $X_\Lambda = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid (x_i)_{i=-\infty}^{\infty} \in \Lambda\}$ とおき，力学系 (X_Λ, σ) を(対応する右片側)サブシフトと呼ぶ。

以後，サブシフトはすべて右方側サブシフト(X_Λ, σ)とする.

3. サブシフトからできるC^*環

サブシフト(X_Λ, σ)に対してC^*環$\mathcal{O}_\Lambda$を[Ma]に従って構成する。そのcanonicalなgenerating partial isometriesを$S_1, \dots, S_n$とする。以下，記号は全て[Ma]に従うとする。ここで

$\mathcal{D}_\Lambda = S_\mu S_\mu^*, \mu \in \Lambda^*$で生成されるC*環

$D_\Lambda \equiv S_\mu a S_\mu^*, \mu \in \Lambda^*, a \in A_\Lambda$で生成されるC*環

$\phi_\Lambda(X) \equiv \sum_{j=1}^{n} S_j X S_j^*, \quad X \in \mathcal{O}_\Lambda$ とおく.

サブシフトの上の自己同型の全体を$\mathrm{Aut}(X_\Lambda)$で表す。つまり

$\mathrm{Aut}(X_\Lambda) = \{ h : X_\Lambda \to X_\Lambda : 同相で\ h \circ \sigma = \sigma \circ h \}$

以下調べたいことは，$\mathrm{Aut}(X_\Lambda)$と$\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_\Lambda)$の関係である

4. サブシフトの自己同型とC*環の自己同型

次の補題が大事である（サブシフトは条件(I)を満たすとしている）.

補題1. 任意の$h \in \mathrm{Aut}(X_\Lambda)$に対して，（必ずしも唯一ではない）$\alpha_h \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_\Lambda)$が存在して，$\alpha_h|_{\mathcal{D}_\Lambda} = h^*$ on $C(X_\Lambda) = \mathcal{D}_\Lambda$を満たす。さらに，対応$h \in \mathrm{Aut}(X_\Lambda) \xrightarrow{\alpha} \alpha_h \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_\Lambda)$は準同型にとれる。

同一視 $(\mathcal{D}_\Lambda, \Phi_\Lambda) = (C(X_\Lambda), \sigma^*)$ の下で，$Aut(X_\Lambda)$ の $Aut(\mathcal{O}_\Lambda)$ への extension の全体を $Aut_\sigma(\mathcal{O}_\Lambda, \mathcal{D}_\Lambda)$ と表す。

つまり

$$Aut_\sigma(\mathcal{O}_\Lambda, \mathcal{D}_\Lambda) = \{ \alpha \in Aut(\mathcal{O}_\Lambda) \text{ such that } \alpha(\mathcal{D}_\Lambda) = \mathcal{D}_\Lambda, \quad \alpha \circ \Phi_\Lambda = \Phi_\Lambda \cdot \alpha \text{ on } \mathcal{D}_\Lambda \}$$

サブシフトが条件(I)を満たしていれば，次の補題が成立する。

補題2. $\mathcal{D}_\Lambda' \cap \mathcal{O}_\Lambda = D_\Lambda$: Relative commutant of $\mathcal{D}_\Lambda$ in $\mathcal{O}_\Lambda$.

従って，上の $Aut_\sigma(\mathcal{O}_\Lambda, \mathcal{D}_\Lambda)$ は次のようになる

定理3 $Aut_\sigma(\mathcal{O}_\Lambda, \mathcal{D}_\Lambda) \cong \mathcal{U}(D_\Lambda) \rtimes Aut(X_\Lambda)$: 半直積

但し $\mathcal{U}(D_\Lambda)$ は D_Λ の unitary 群。

系4. 任意の $h \in Aut(X_\Lambda)$ に対して，K-群 $K_*(\mathcal{O}_\Lambda)$ の自己同型 $h_* \in Aut(K_*(\mathcal{O}_\Lambda))$ が存在して，対応

$$h \in Aut(X_\Lambda) \longrightarrow h_* \in Aut(K_*(\mathcal{O}_\Lambda))$$

が準同型的になる。

この系は，今後のサブシフトの自己同型の研究に役に立つと思われる。

5. 外部自己同型

$Aut(X_\Lambda)$ の元を $Aut(\mathcal{O}_\Lambda)$ に extension したとき，いつ $\mathcal{O}_\Lambda$ の外部自己同型を与えるかは，大変興味がありそうな問題に思える。

$$\mathrm{Int}_\sigma(\mathcal{O}_n, \mathcal{D}_n) \equiv \mathrm{Int}(\mathcal{O}_n) \cap \mathrm{Aut}_\sigma(\mathcal{O}_n, \mathcal{D}_n)$$

$$\mathrm{Out}_\sigma(\mathcal{O}_n, \mathcal{D}_n) \equiv \mathrm{Aut}_\sigma(\mathcal{O}_n, \mathcal{D}_n) / \mathrm{Int}_\sigma(\mathcal{O}_n, \mathcal{D}_n)$$

とおく。

このとき，サブシフトが条件(I)よりやや強い条件(D)（cf. [Ma2]）というのを満たしていれば，

命題5，任意の $k \in \mathrm{Aut}(X_n)$ ($k \neq \mathrm{id}$) に対して，そのいかなる $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_n)$ への extension も outer である。

すると，だいたい予測できるように，

$$Z_\sigma^1(\mathcal{U}(D_n)) = \{u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{U}(D_n) \mid u(k+l) = u(k)\,\phi_n^k(u(l)) \quad {}^\forall k, l \in \mathbb{N}\}$$

$$B_\sigma^1(\mathcal{U}(D_n)) \equiv \{u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{U}(D_n) \mid \exists v \in \mathcal{U}(D_n);\ u(k) = v\,\phi_n^k(v^*),\ k = 1, 2, \ldots\}$$

とおき

$$H_\sigma^1(\mathcal{U}(D_n)) = Z_\sigma^1(\mathcal{U}(D_n)) / B_\sigma^1(\mathcal{U}(D_n))$$

とおくと，$Z_\sigma^1(\mathcal{U}(D_n)) \cong \mathcal{U}(D_n)$ であることより

定理6． $\mathrm{Out}_\sigma(\mathcal{O}_n, \mathcal{D}_n) = H_\sigma^1(\mathcal{U}(D_n)) \rtimes \mathrm{Aut}(X_n)$ 半直積

と分解される。これでだいぶ $\mathrm{Aut}(X_n)$ と $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_n)$ の関係が分ってきたようである と言えると思う。

サブシフトの自己同型の具体的な例を使った計算や，ここで述べた定理や補題の証明はすべて [Ma2] に現れる予定である

主な References

[C] : J. Cuntz : Automorphisms certain simple C*-algebras, in Quantum Fields Algebras, Springer (1980) 187–196

[ETW] : M. Enomoto, H. Takehana, Y. Watatani ; Automorphisms on Cuntz algebras. Math. Japonica 24 (1979), 231–234

[KT] : Y. Katayama, H. Takehana, On automorphisms of generalized Cuntz algebras, preprint

[Ma] : K. Matsumoto, On C*-algebras associated with subshifts. Internat. J. Math. 8 (1997)

[Ma2] : ―――― On automorphism of C*-algebras associated with subshifts, preprint しかし現在改訂中